

أثر التدريس القائم على نظرية النشاط في تعزيز مفهوم التكافؤ الرياضي لدى طلبة الصف الخامس

الأستاذ الدكتورة أمل خصاونةⁱⁱ
تاريخ القبول
2024/2/18

نجاح ساطي القرعانⁱ
تاريخ الاستلام
2024/1/16

المخلص

هدفت هذه الدراسة إلى تقصي أثر التدريس القائم على نظرية النشاط في تعزيز مفهوم التكافؤ في حل المعادلات الخطية لدى طلبة الصف الخامس؛ ولتحقيق الهدف من هذه الدراسة تم إعداد اختبار للكشف عن طبيعة فهم الطلبة لمعنى المساواة، وذلك للانطلاق في بناء المادة التعليمية من مستوى فهم الطلبة لمعنى المساواة. واختيرت عينة الدراسة بالطريقة المتيسرة؛ إذ تم اختيار شعبتين من شعب الصف الخامس في مدرسة الطيبة الأساسية للبنات والتابعة لمديرية تربية لواء الطيبة والوسطية؛ لتكون إحداها المجموعة التجريبية التي تم تدريسها المادة التعليمية وفق التدريس القائم على نظرية النشاط، والأخرى الضابطة التي تم تدريسها بالطريقة الاعتيادية، ثم تعرضت المجموعتان لاختبار التكافؤ في حل المعادلات. وأشارت نتائج التحليل إلى وجود أثر إيجابي للتدريس القائم على نظرية النشاط في تعزيز التكافؤ الرياضي لدى الطالبات. وفي ضوء نتائج الدراسة تمت التوصية بتوظيف التدريس القائم على نظرية النشاط في تدريس موضوعات رياضية متنوعة، ودعوة الباحثين لإجراء المزيد من الدراسات حوله بحيث تشمل مستويات تعليمية متنوعة.

الكلمات المفتاحية: نظرية النشاط، التكافؤ الرياضي، مفهوم المساواة، الصف الخامس.

The Effect of Activity Theory-based Instruction on Enhancing the Mathematical Equivalence Concept among Fifth Grade Students.

Abstract:

This study aimed to investigate the effect of teaching based on activity theory in enhancing the concept of equivalence in solving linear equations among fifth-grade students. To achieve the goal of this study, a test was prepared to reveal the nature of students' understanding of the meaning of equality; so that they could start building the educational material from the level of students' understanding of the meaning of equality. The study sample was selected using the available method, where two classes from the fifth-grade classes at Al-Taybeh Elementary School for Girls, affiliated with the Directorate of Education of Al-Taybeh and Al-Wusta Districts, were selected, one of which was the experimental group that taught the educational material according to teaching based on activity theory, and the other was the control group that was taught using the traditional method. Then, the two groups were subjected to the equivalence test in solving equations. The results of the analysis indicated a positive effect of teaching based on activity theory in enhancing mathematical equality among female students. In light of the results of the study, it was recommended to employ teaching based on activity theory in teaching various mathematical subjects, and researchers were invited to conduct more studies on it to include various educational levels.

Keywords: Activity theory, mathematical equality, concept of equality, fifth grade.

المقدمة

تسعى جميع الأنظمة التعليمية إلى جعل الجبر في متناول الجميع، وهذا الهدف لن يتسنى حدوثه إلا بوضع حجر الأساس المتين كقاعدة راسخة لتعلم الجبر، والبناء عليها لفهم الجبر عالي المستوى لاحقاً. وتتشكل تلك القاعدة بمجموعة من المفاهيم الجبرية الأساسية التي تمثل نقطة انطلاق لتعلم الجبر وإتقانه. ويُعد مفهوم التكافؤ الرياضي واحداً من أبرز تلك المفاهيم؛ إذ أكدت الدراسات على أهميته كمفهوم جبري أساسي له دوره في تطوير الفهم الجبري، والاستعداد للجبر عالي المستوى (Rittle-Johnson et al., 2011; Vale, 2013; McNeil et al., 2019; Lee et al., 2022).

إن ضعف الطلبة في التكافؤ الرياضي واضحٌ في الميدان التعليمي. وهذا ما أكدته نتائج العديد من الدراسات التي أشارت إلى تدني مستوى الطلبة في فهم معنى المساواة؛ إذ إن أغلبية الطلبة ينظرون إليها كإشارة لإجراء العمليات الحسابية، ولإيجاد الناتج وليس كعلاقة تكافؤ. وأن الطلبة يواجهون صعوبات في مفهوم التكافؤ الرياضي الذي يشكل معضلة حقيقية لدى كثير منهم في تعلم الجبر (Duncan, 2015; Mcneil, 2019; Lee & pang, 2023).

ولما كانت هناك فروقات في طبيعة فهم الطلبة لعلامة المساواة، وانعكاسها على أداء الطلبة وفهمهم الجبري بشكل عام وعلى فهمهم للتكافؤ بشكل خاص، كان لا بد من التغلب على مشكلاتهم وفهمهم المغلوط للتكافؤ والمساواة، ومنح الأمر مزيداً من الاهتمام. ففي هذا السياق دعت دراسة (مكيوليف) وآخرون (McAuliffe et al. (2020 إلى ضرورة الاهتمام بمفهوم المساواة والتكافؤ، والبحث عن السبل الممكنة لتعزيزها لدى الطلبة. وقد حاول (لي) وآخرون (Lee et al. (2022) توظيف إستراتيجيات تدريسية للنهوض بمستوى فهم الطلبة للتكافؤ الرياضي. ويأتي السؤال هنا من المعلمين: ما نقطة البداية لتعزيز المفهوم لدى الطلبة؟

إن الإجابة عن التساؤل السابق تدفع للتعرف إلى مستوى وطبيعة الفهم الحالي للطلبة للانطلاق منه، والبناء عليه بعد تصويب الفهم المغلوط إن وجد. لذلك فإن محاولة تنمية مفهوم التكافؤ الرياضي لدى الطلبة تتطلب قياس وضع الطلبة الحالي، ثم وضع الأهداف المراد تحقيقها؛ للوصول بالطلبة للفهم المأمول. وهذا لا يتسنى حدوثه إلا بسلسلة من الإجراءات المدروسة والقواعد الضابطة التي يُخطط لها من قبل المعلم في بيئة تعليمية تسودها الدافعية بشكل عام، ودافعية المتعلم ورغبته في الوصول للأهداف بشكل خاص؛ لذلك يمكن أن تكون نظرية النشاط مناسبة لتوظيفها في عملية التدريس، وهذا ما يؤكد هاشم وجون (Hashim and Jones (2007 بأن نظرية النشاط توفر إطاراً عملياً مفاهيمياً قائماً على فكرة النشاط مع مراعاتها للعلاقة القائمة بين المتعلم والأدوات، وبين الواقع الحالي والهدف المأمول في بيئة تفاعلية تحركها الدافعية والرغبة في تحقيق الهدف. فما نظرية النشاط؟ وعلى ماذا تقوم؟ وكيف يمكن توظيفها في عملية التدريس؟

تقوم نظرية النشاط على فكرة مفادها أن تفاعل الفرد مع بيئته ليس مباشراً، وإنما يتم ذلك من خلال استخدام الأدوات، حيث حل (فيجوتسكي) نشاط المتعلم على أنه يتمتع بثلاث خصائص أساسية تتمثل في أنه موجه نحو هدف مأمول، ويتم بوساطة الأدوات، ويتم تشكيله اجتماعياً. وهذا يعني أن النشاط نظام متشابك يعتمد فيه كل جزء على الآخر، وإذا حدث أي تغير في أحد الجوانب فإنه سينعكس حتماً على النشاط ككل، لذلك لا بد أن يكون التطور فيه من كافة الجوانب بشكل متوازن لخدمة الأهداف التعليمية. فالفكرة الأساسية لنظرية النشاط التي جاء بها (فيجوتسكي) (1978 Vygotsky) هي أن تطور الأفكار والمعارف الخاصة بالفرد تتطلب تفاعلاً اجتماعياً

تتوسط فيه الأدوات المتاحة؛ لتحقيق الأغراض المنشودة في بيئة تعليمية تفاعلية يسودها الحماس والدافعية.

وقد وسع (لينيوتيف) (1981) (Leontev) نموذج مثلث النشاط (لفيجوتسكي) ذي الثلاث خصائص: (الموضوع، والهدف، والأدوات) إلى نموذج له مجموعة مكونات تفاعلية أشبه ما يكون بإطار تحليلي يمكن توظيفه لبحث تفاعل الفرد مع بيئته بشكل يلي الأهداف المنشودة. وبشكل محدد فإنّ النموذج يتضمن ست مكونات هي: النشاط، والهدف، والعمليات، والإجراءات، والشروط، والدافعية. وكذلك طور (انجستروم) (1987) (Engestrom) إطاراً تحليلياً لنظرية النشاط له سبعة مكونات متفاعلة هي: موضوع النشاط، والهدف منه، والأدوات، والقواعد، وتوزيع الأدوار، والتواصل الاجتماعي، والنتائج. وفي السياق نفسه اقترح (بيدني وكاروسكي) (Bedny (2007) (and Karwowski) إطاراً للنشاط من سبعة مكونات متفاعلة هي: موضوع النشاط، والهدف، والمهام، والأدوات، والطرق، والإجراءات، والنتائج.

وبشكل عام تدور نظرية النشاط حول هدفٍ مقصود يتم الوصول إليه من خلال تحديد مكونات النشاط والنظر إليها نظرة ديناميكية من حيث أنها متفاعلة باستمرار فيما بينها. فقد اقترح (بينيت) المشار إليه في (ماسون) (2011) (Mason) إطاراً للنشاط يتضمن ستة مكونات متفاعلة هي: الوضع الحالي، والهدف، والدافعية، والمهام، المصادر والأدوات، والوسائل الإجرائية. ووضح (ماسون) أن تكييف النشاط وفقاً للأهداف المأمولة، وانطلاقاً من الواقع الحالي للمتعلمين، يتطلب نظاماً منطقياً من الإجراءات والقواعد التي يتم من خلالها تحقيق أهداف المهام الفرعية بواسطة الأدوات المتاحة ودافعية التعلم؛ لتحقيق الهدف المأمول من النشاط في بيئة تعليمية اجتماعية.

وأكد (خوك سينج) (2003) (Khiok-Seng) بأن النشاط نظام اجتماعي محدد بموضوع، ويتم تحقيق أهدافه من خلال إجراءات فردية متسلسلة، يتم تنفيذها عن طريق العمليات المنطقية في بيئة تعليمية تفاعلية. وعندما يخفق الطالب في التعامل مع المعادلات المتكافئة، مثلاً تبرز أهمية الإجراءات الموجهة التي تركز على مفهوم التكافؤ؛ لتوجهه نحو إعادة التأمل في فهمه من خلال الألفة مع المهام الفرعية للنشاط وصولاً لتحقيق الأهداف المأمولة.

إن نظرية النشاط من النظريات القديمة والمتطورة والمرنة، فمكونات النشاط فيها ليست ثابتة، وهذا ما أشارت إليه (ناردي) (1996) (Nardi) بأنها تتغير ديناميكياً بتغير الظروف؛ إذ إن الظروف المتغيرة تفرض إعادة تشكيل النشاط ومكوناته من جديد. ففي مجال تعليم الرياضيات جاء في دراسة (نونيز) (2009) (Nunez) مجموعة من الافتراضات التي توضح مراحل تطورها؛ فقد كان ينظر إلى النشاط على أنه نظام تفاعلي بين المتعلمين والبيئة المادية، فتغير الطلبة معرفياً يكون نتيجة لتغير بيئتهم المادية، ثم تطور مفهوم النشاط ليصبح نظاماً اجتماعياً يتفاعل فيه المتعلمون فيما بينهم ومع معلمهم؛ فالتعلم لن يحدث بشكل فردي، بل من خلال التفاعل مع الآخرين، ثم توضحت معالم النشاط أكثر ليصبح موجهاً نحو هدف تعليمي محدد يسعى الجميع إلى تحقيقه، ثم تحددت معالمه أكثر عندما توسطت الأدوات في تفاعل المتعلمين مع بيئتهم التعليمية ضمن قواعد وإجراءات تنظم عملية الوصول للأهداف المرجوة؛ وعليه فإن نظام النشاط ليس نظاماً تعليمياً منعزلاً كأن يشارك الطالب في حل مسألة رياضية مطروحة بشكل منعزل، بل يتفاعل معها في ضوء إستراتيجية التدريس القائم على نظرية النشاط بالتعاون مع زملائه، ومعلمه، والأدوات التعليمية في بيئة تفاعلية من أجل تحقيق الأهداف المنشودة.

ولأن نظرية النشاط غير ثابتة ومتطورة، فلا يوجد منهجية واحدة بعينها استخدمت من قبل الباحثين لا سيما في مجالات التعليم؛ ولأن مكونات النشاط مرنة ومنبثقة من واقع المتعلمين معرفياً

وبينياً؛ فربما تكون الأكثر ملاءمة من غيرها لتوظيفها في التدريس لتعزيز فهم الطلبة في مفهوم رياضي يعتبر جوهر أساسي في تعلم الرياضيات بشكل عام وفي تعلم الجبر بشكل خاص، ألا وهو مفهوم التكافؤ الرياضي. فماذا لو تم توظيف التدريس القائم على نظرية النشاط في تدريس وحدة المعادلات لطلبة الصف الخامس؟ وما أثره في تعزيز مفهوم التكافؤ لديهم؟

مشكلة الدراسة

انطلاقاً من أهمية مفهوم التكافؤ الرياضي بوصفه أحد المفاهيم الأساسية المفتاحية لتعلم الجبر كان لزاماً على القائمين على تدريس الرياضيات تنميته لدى المتعلمين بكافة السبل الممكنة؛ ولأن الكثير من الدراسات ومنها: (McNeil,2008; Dancen,2015; Tondorf and Prediger,2022) أشارت إلى وجود ضعف لدى الطلبة في معنى المساواة والتكافؤ الرياضي، وأن عدم الاستعداد لتعلم الجبر يمكن إرجاعه إلى مستوى فهم الطلبة الضعيف لمفهوم التكافؤ الرياضي والذي يتكون لديهم من خبراتهم السابقة في الحساب، كان لا بد من تفصي وضع الطلبة الحالي لاستكشاف ما لديهم من خبرات سابقة متعلقة بمفهوم المساواة والتكافؤ؛ فالتكافؤ الرياضي فكرة مفتاحية في الرياضيات لها جذورها في الحساب والقياس والهندسة والجبر. وعليه، فإن هذا الدور الجوهري لمفهوم التكافؤ الرياضي يدفع لضرورة الاهتمام به وتعزيزه لدى المتعلمين، على أن تكون الانطلاقة مما لديهم من خبرات سابقة لتصويبها أو تعزيزها، وهذا ما قد يوفره التدريس القائم على نظرية النشاط من حيث انطلاقه من الواقع الحالي للمتعلمين؛ فربما أن التدريس في ضوء نظرية النشاط يلبي الأغراض المنشودة من هذه الدراسة التي جاءت لتبحث في أثر استخدام التدريس القائم على نظرية النشاط في تعزيز مفهوم التكافؤ لدى طالبات الصف الخامس، وتحديدًا فإن هذه الدراسة جاءت للإجابة عن الأسئلة الآتية:

1. كيف تفهم طالبات الصف الخامس معنى المساواة وتفسرها؟
2. ما أثر التدريس القائم على نظرية النشاط في تعزيز مفهوم تكافؤ حل المعادلات لدى طالبات الصف الخامس؟

أهمية الدراسة

انبثقت أهمية هذه الدراسة من أهمية الموضوع الرياضي الذي تم بحثه ومحاولة تنميته لدى الطالبات ألا وهو موضوع التكافؤ الرياضي؛ إذ إنه يمثل مفهوماً جبرياً أساسياً له دوره الكبير في تعلم الرياضيات بشكل عام وموضوعات الجبر بشكل خاص. واكتسبت الدراسة أهميتها النظرية من المعرفة التي ستضيفها إلى قواعد البيانات حول التدريس القائم على نظرية النشاط، خاصة مع ندرة الدراسات التي بحثت في أثر استخدام التدريس القائم على نظرية النشاط في التعلم، رغم قوة النظرية في تحليل ووصف نظام التعليم والتعلم. ويمكن القول بأن هذه الدراسة تمثل خطوة أولى تدفع لإجراء المزيد من الدراسات حول توظيف نظرية النشاط في تدريس موضوعات دراسية متنوعة.

وتبرز الأهمية العملية بالإطار التدريسي لنظرية النشاط الذي اقترحه الباحثة في هذه الدراسة؛ فيمكن الاستفادة المعلمين منه لاحقاً في تصميم وتدريس موضوعات رياضية متنوعة، وذلك لكسر الجمود في حصص الرياضيات الاعتيادية، لا سيما أن التدريس القائم على نظرية النشاط يتضمن شبكة من المكونات التفاعلية تتيح للطالب المشاركة في تعلمه؛ فنظرية النشاط تأخذ بالحسبان أن التعلم يحدث في بيئة اجتماعية تفاعلية يتم بوساطة الأدوات المتاحة في جو تعليمي يأخذ المتعلمون

والمعلمون أدوارهم فيه ضمن قواعد وأصول تنطلق من واقع الطلبة الفعلي وحاجاتهم الحقيقية، وصولاً لتحقيق الأهداف المرجوة ضمن سلسلة من الإجراءات المدروسة عبر المهمات والأنشطة.

التعريفات الإجرائية

التدريس القائم على نظرية النشاط: منحى تعليمي ثلاثي المراحل (مرحلة إيجاد الدافع لدى المتعلمين، ومرحلة بناء المعرفة، ومرحلة الممارسة) ينطلق من الواقع الحالي (مفهوم الطلبة للمساواة) إزاء المادة المراد تعليمها لهم من أجل تحقيق الأهداف المأمولة، في جو يسوده الحماس والدافعية. ويقوم التدريس على فكرة أساسية مفادها أن تفاعلات المتعلمين مع المهمات المطروحة ليست مباشرة، وإنما من خلال توظيف الأدوات المتاحة وذلك ضمن سلسلة من الإجراءات الواضحة.

التكافؤ الرياضي في حل المعادلات الخطية: قدرة الطالبة على توظيف مفهوم التكافؤ الرياضي في حل المعادلات الخطية من خلال رؤية العلاقات بين التعابير الجبرية، واتخاذ نفس الإجراءات الرياضية على طرفي إشارة المساواة أثناء حل المعادلات، وكذلك قدرتها على تمييز المعادلات الخطية المتكافئة التي لها الحلول نفسها من خلال النظر إلى بنية المعادلات أو من خلال إيجاد الحلول لكل منها ومقارنتها، وتتحدد هذه القدرة بالعلامة التي سترزها الطالبة على اختبار التكافؤ في حل المعادلات الخطية ببعديه (تطبيق التكافؤ أثناء حل المعادلة، تمييز المعادلات الخطية المتكافئة).

محددات الدراسة:

تحددت نتائج هذه الدراسة بالوحدة التعليمية المتمثلة بوحدة المعادلات، وبطبيعة المادة التعليمية القائمة على نظرية النشاط؛ فنتائج هذه الدراسة مرتبطة بمستوى المادة المعدة، وطريقة تكييفها تبعاً لمكونات النظرية. وتحددت النتائج أيضاً بطريقة اختيار عينة الدراسة وهي المتيسرة، حيث اقتصرت هذه الدراسة على طالبات الصف الخامس الأساسي الملتحقات في إحدى المدارس التابعة لمديرية لواء الطيبة والوسطية للعام الدراسي 2023/2022م. كما تحددت النتائج بالخصائص السيكومترية للاختبارات المعدة، ومقاييس تحليل البيانات المستخدمة في هذه الدراسة.

الدراسات السابقة

نظراً لأهمية مفهوم التكافؤ في علم الرياضيات بوصفه مفهوماً رئيساً تبنى عليه الكثير من المعارف والمفاهيم الرياضية، فقد حظي باهتمام الباحثين على كافة الأصعدة، إذ أجريت العديد من الدراسات التي تناولت المفهوم بشكل خاص وحاولت بعضها تقصي مستويات الطلبة في بنائه وفهمه، وأخرى أوصت بضرورة تنميته لدى المتعلمين.

وفي مجال الأدب البحثي السابق المتعلق بالتكافؤ الرياضي، أشار (ميكل) وآخرون (McNeil et al 2019) أن فهم الطلبة يندرج ضمن فئتين أساسيتين هما: الفهم العلائقي الذي يشير إلى قدرة الطلبة على رؤية العلاقات بين التعبيرين على كلا جانبي علامة المساواة، والفهم الإجرائي الذي يشير إلى أن علامة المساواة تعني إيجاد الناتج، وما بين الفهمين تفاوت مستويات فهم الطلبة بشكل عام. وهدفت دراسة (ماكيوليف) وآخرون (McAuliffe et al. 2020) إلى التحقيق في فهم طلبة الصف الرابع للتكافؤ الرياضي في جنوب إفريقيا، مع التركيز بشكل خاص على تفسيراتهم لعلامة المساواة. حيث قُدم للطلبة اختبار في التكافؤ الرياضي تكوّن من خمسة عشر بنداً، أسفرت نتائج

التحليل بأن أغلبية الطلبة فسروا معنى المساواة على أنها "إيجاد الناتج"، في حين فسر بعضهم معنى المساواة بأنها تعني "نفس الشيء". كما أظهرت النتائج ضعف الطلبة في حل المعادلات حيث إنهم نادراً ما يستخدمون إستراتيجيات المقارنة في إيجاد الحل. وأظهرت دراسة (مادج) (Madej (2021) وجود أربعة مستويات لفهم الطلبة هي: المستوى الإجرائي الصارم (النجاح في حل المعادلات بالنمط التقليدي)، والمستوى الإجرائي المرن (النجاح في حل المعادلات غير النمطية)، ومستوى العلائقية الأساسية (النجاح في حل المعادلات بأنماطها المختلفة مع القدرة على التفسير)، ومستوى العلائقية- المقارنة (رؤية العلاقات بمقارنة التعبيرات على طرفي علامة المساواة).

وأشار سمبتر ولونهيلم (Sumpter and Lowenhielm (2022) أن أغلبية الطلبة ينظرون إلى المساواة على أنها علامة لوضع الإجابة النهائية، ومنهم من ينظر إليها كإشارة على أن التعبيرين على جانبها لهما نفس القيمة، وآخرون كرمز لصياغة التعاريف وإعطاء قيمة للرموز. وبمراجعة الأدب البحثي المتعلق بنظرية النشاط، فقد تبين أن هناك دراسات ذات طابع نظري أجريت حول النظرية؛ قدمت أطر تحليل بحثية يمكن استخدامها من قبل الباحثين لوصف وتحليل الممارسات البشرية التفاعلية. وهناك دراسات أخرى قدمت نظرية النشاط كإطار مفاهيمي تدريسي وتقييمي لتصميم المادة التعليمية في التدريس بشكل عام.

لقد وصف (خوك سينق) (KhioK-Seng (2003) تعليم وتعلم الرياضيات من منظور نظرية النشاط داخل الغرفة الصفية وخارجها، إذ وفرت النظرية طريقة منهجية لوصف واقع تعلم الطلبة وفهمهم للرياضيات، حيث تم توظيف نهج النظرية بتحليل الصورة العامة لتعلم الطلبة للرياضيات، ووصف معالم البيئة التعليمية ثم الانتقال إلى السمات الدقيقة للمتعلمين والمتعلقة بأدائهم وجوانب تفاعلهم الإدراكي والوجداني.

وللكشف عن تصورات الطلبة حول العوامل التي تؤثر بتعلمهم في المدرسة، استخدم (بورتنوف نيومان) و(باراك) (Portnov-Neeman and Barak (2013) نظرية النشاط كإطار تحليلي يتضمن خمس مكونات هي: الأهداف التعليمية، والأدوات المستخدمة، والإجراءات المتبعة، ومجتمع التعلم، وقواعد تقسيم العمل. وأظهرت النتائج أن التعليم الحالي لا يقدم سوى القليل من التعلم البنائي الذي من المفترض أن يكون فيه المتعلمون على وعي بضرورة تفاعلهم مع بيئتهم، ومجتمع تعلمهم، والمصادر المتاحة لديهم لتحقيق الأغراض المنشودة من التعلم.

وأشار حسن (وكازيوسكاس) (Hasan and Kazlauskas (2014) إلى مجموعة من الخطوات الإرشادية العامة والتي يمكن السير في ضوءها لتطبيق نظرية النشاط في البحث؛ فتطبيق النظرية يتطلب تحديد الأنشطة الهامة للنظام التي سيتم التحقيق في موضوعاتها وأهدافها، ثم تحديد الأدوات المساعدة والإجراءات التي سيتم اتباعها أثناء التطبيق، مع تحديد التداخلات والتفاعلات داخل وبين الأنشطة لضمان تحقيق الأهداف المأمولة.

واستخدم (ميتسي وباباسبيرو) (Mitsi and Papaspyrou (2017) نظرية النشاط في إطار التدريس المتميز على طلبة الصف السادس في اليونان، بهدف تقصي أثر استخدام نظرية النشاط أثناء التدريس المتميز في معرفة الطلبة ومشاركتهم الفاعلة في التعلم. وقد أظهرت النتائج أن نظرية النشاط كانت حافزاً لبناء المعرفة من قبل الطلبة أنفسهم، علاوة على أثرها في تعزيز تواصل الطلبة ومشاركتهم الفاعلة.

وأجرى لوك وآخرون (Loc et al. (2022) دراسة في فيتنام تم فيها استخدام نظرية النشاط كمنهج تدريسي لموضوع معادلات الخط المستقيم في المستوى الإحداثي، وقد كشفت نتائج الدراسة

أنّ طلبة الصف التجريبي الذين تم تدريسهم باستخدام نظرية النشاط حققوا نتائج تعليمية أفضل من طلبة الصف الضابط الذين تم تدريسهم باستخدام طريقة التدريس التقليدية؛ وفي الصف التجريبي انخفض عدد الطلبة الضعفاء مقارنة بما كانوا عليه.

منهج الدراسة

تم استخدام المنهج المختلط؛ الوصفي- النوعي وشبه التجريبي. فقد استخدم المنهج الوصفي-النوعي من أجل تحديد الوضع الحالي للطلّبات والذي تم الانطلاق منه كمكون من مكونات نظرية النشاط، وذلك من خلال الإجابة عن السؤال الأول في الدراسة. كما استخدم المنهج شبه التجريبي بتصميم اختبار بعدي لمجموعتين إحداهما تجريبية والأخرى ضابطة؛ لتقصي أثر التدريس القائم على نظرية النشاط في تعزيز التكافؤ الرياضي لدى طالبات الصف الخامس، وذلك من خلال الإجابة عن السؤال الثاني في هذه الدراسة، وبذلك تتحدد متغيرات الدراسة **بالمتغير المستقل**: "طريقة التدريس" التي تتحدد بمستويين: (التدريس الاعتيادي، والتدريس القائم على نظرية النشاط)، و**المتغير التابع**: "الأداء على اختبار التكافؤ الرياضي".

أفراد الدراسة

تم اختيار عينة الدراسة بالطريقة المتيسرة؛ وذلك لأن الباحثة تعمل معلمة في المدرسة التي تم تطبيق الدراسة فيها. وتمثلت عينة الدراسة في (40) طالبة من طالبات الصف الخامس من مدرسة الطيبة الأساسية للبنات، التابعة لمديرية لواء الطيبة والوسطية للعام الدراسي (2022/2023م)، حيث تم اختيار شعبتين عشوائياً من بين ثلاث شعب، بحيث عينت إحداهما مجموعة تجريبية وتضم (20) طالبة، وتم تدريسها وحدة المعادلات باستخدام التدريس القائم على نظرية النشاط، والشعبة الثانية والتي تضم (20) طالبة لتكون المجموعة الضابطة، وقد تم تدريسها بالطريقة الاعتيادية.

أدوات الدراسة

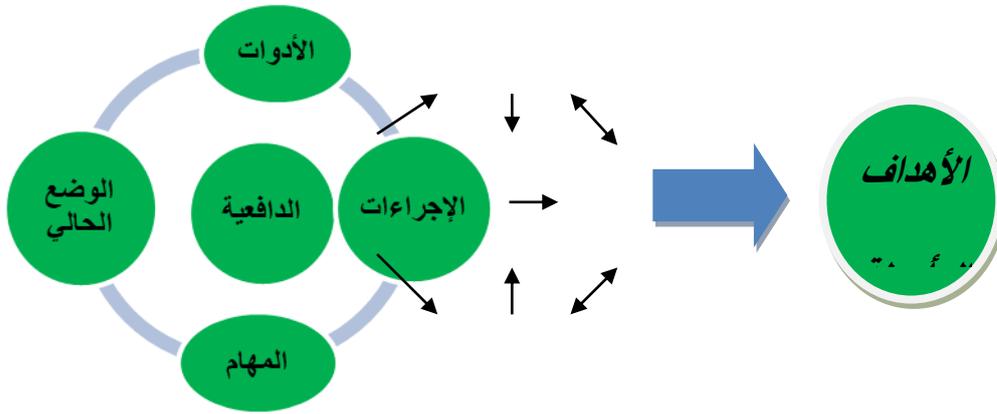
لتحقيق أهداف الدراسة تم إعداد المادة التعليمية وفق التدريس القائم على نظرية النشاط، ولجمع بيانات الدراسة تم استخدام الأدوات الآتية: اختبار الكشف عن طبيعة فهم الطالبات لعلامة المساواة، واختبار التكافؤ الرياضي وفيما يأتي عرض تفصيلي لهذه الأدوات:

أولاً: المادة التعليمية القائمة على نظرية النشاط

تضمنت المادة التعليمية جزأين متكاملين، حيث تضمن الجزء الأول نبذة تعريفية بماهية التعلم القائم على نظرية النشاط، وأهميته في دعم تعلم الطلبة، وخطوات تنفيذه داخل الغرفة الصفية بتوضيح دور كل من المعلم والمتعلم أثناء تطبيقه. أما الجزء الثاني فقد تضمن إعادة بناء للوحدة الدراسية السابعة "المعادلات" من كتاب الفصل الثاني لرياضيات الصف الخامس الأساسي، والذي أقرّ وفق قرار مجلس التربية والتعليم رقم (2020/165) بتاريخ 2020/12/17م الذي يتضمن الموضوعات الآتية: (إيجاد قيمة المقدار الجبري، معادلات الجمع والطرح، معادلات الضرب والقسمة، خطة حل المسألة "أرسم نموذجاً")، استناداً إلى إطار نموذج نظرية النشاط الذي قامت الباحثة ببنائه بالرجوع إلى مكونات النشاط التي اقترحها بينت Bennett والمشار إليه في ماسون (2011) Mason، وإلى الأطر المقترحة في الأدب السابق ليفجوتسكي (1978) Vygotsky، وليونتيف (1981) Leont'Ve، وانجسترون (1987) Engesrom، ولوك وآخرون loc et

(2022) al، حيث تم إعادة بناء وحدة "المعادلات" للصف الخامس، بشكل يسمح بتدريسها ضمن منحي ثلاثي المراحل لكل درس من دروس الوحدة كآلاتي:
المرحلة الأولى: إيجاد دافع لدى المتعلمين بضرورة التعلم وتوعيتهم بالأهداف المأمول تحقيقها، حيث يتم طرح موقف تعليمي في الحصة الأولى من كل درس، يثير اهتمام المتعلمين، ويشعرهم بالحاجة للتعلم، ويجعلهم واعين بالأهداف التعليمية.
المرحلة الثانية: إتاحة فرصة بناء المعرفة لدى المتعلمين عبر ثلاث حصص مقرررة لكل موضوع رياضي، من خلال دمجهم بالأنشطة التعليمية التي تم تصميمها انطلاقاً من الواقع الحالي للمتعلمين إزاء الموضوع المراد تدريسه، وذلك في ضوء إطار نظرية النشاط المستخدم، والمكون من ستة أبعاد متفاعلة كما هو موضح بالشكل (1):

شكل (1): إطار نظرية النشاط.



- **الوضع الحالي للمتعلمين:** وصف الحالة الراهنة للمتعلمين إزاء المفهوم الرياضي المقرر تدريسه، والكشف عما يشعر به المعلم اتجاه المتعلمين من خلال خبرته وملاحظته لهم، وفي ضوءه يتم صياغة الأهداف الفرعية المأمولة.
- **الأهداف المأمولة:** نتاجات التعلم المرجو تحقيقها لدى المتعلمين إزاء الموضوع الرياضي المقرر تدريسه.
- **الدافعية:** وهي المحفز للمتعلمين لضمان تحركهم الصحيح من الوضع الحالي وصولاً بهم إلى تحقيق الأهداف المأمولة، مثل: طرح مواقف تعليمية في بداية الدرس لجذب انتباههم، وتعزيزهم بالكلمات الداعمة، واستخدام المنافسة الإيجابية بينهم.
- **المهام:** مجموعة الأنشطة الرياضية التي يصممها المعلم في ضوء الأهداف الفرعية والتي ينفذها الطلبة ضمن إجراءات محددة وواضحة.
- **الأدوات:** كل ما يمكن الاستفادة منه في تنفيذ المهام وقد تكون مادية مثل: السبورة والقطع الجبرية والميزان ذي الكفتين والوجوه الضاحكة، أو غير مادية مثل: الصلاحيات الممنوحة، والخبرات المتوفرة، وطرح الأسئلة، واللغة، والإيماءات.
- **الإجراءات:** القواعد المتبعة أثناء سير النشاط حيث تقسم إلى إجراءات عامة على مستوى الصف بأكملها وأخرى توجيهية للطلبة أثناء تنفيذهم للمهام المطروحة.

المرحلة الثالثة: إيجاد فرص الممارسة للمتعلمين، من خلال تقديم مسائل رياضية متنوعة صفة وبيئية على موضوع الدرس، لمنحهم مجالاً؛ لترسيخ المعرفة الجديدة وتنظيمها.

ثانياً: أدوات جمع البيانات اختبار مفهوم المساواة

للكشف عن مستويات فهم طالبات الصف الخامس لمفهوم المساواة، وبعد الاطلاع على العديد من الدراسات التي تناولت صياغة الأسئلة التي تقيس طبيعة فهم معنى المساواة ومنها: (Vermeulen and Meyer, 2017; Madej, 2021; Wardat et al,2021; Ralston and Li,2022; Tondor and Predger,2022). تم بناء اختبار المساواة متضمناً أربع مسائل رياضية حيث يهدف بشكل محدد إلى الكشف عن مستويات فهم طالبات الصف الخامس لمعنى المساواة من حيث: تفسير معنى المساواة كمفهوم رياضي؛ كيفية استخدامه في حل الجمل الحسابية المفتوحة؛ كيفية استخدامه في الحكم على صحة العبارات الرياضية التي تتضمن إشارة المساواة.

وبعد إعداد الاختبار تم عرضه على لجنة من المحكمين لإبداء الرأي في الدقة العلمية واللغوية لفقرات الاختبار، وفي مدى ملاءمتها للصف الخامس، وهل تقيس مفهوم المساواة. وقد تم الأخذ بكافة الملحوظات والاقتراحات المقدمة من المحكمين والتعديل في ضوءها. وبعد ذلك تم تطبيق الاختبار على عينة استطلاعية تكونت من (26) طالبة من الصف الخامس من مجتمع الدراسة وخارج عيبتها، لاحتساب الزمن المناسب للإجابة عن أسئلة الاختبار، وللتأكد من ثبات الاختبار. ومن خلال حساب متوسط الزمن الذي استغرقته العينة الاستطلاعية للإجابة عن أسئلة الاختبار، فقد تم تحديد الزمن اللازم بواقع (60) دقيقة. واستخدم المنهج الوصفي- النوعي في تحليل إجابات العينة الاستطلاعية تبعاً لمقياس التحليل الذي تم بناؤه بالرجوع إلى مجموعة من الدراسات (Knuth et al.,2008;Matthews et al.,2020)، والموضح في الجدول (1)، كما تم الاستعانة بمصحح آخر لتحليل إجابات طالبات العينة الاستطلاعية، وبلغت نسبة التوافق في التصحيح بين المصحح والباحثة (100%).

الجدول (1): مقياس تحليل الإجابات عن أسئلة اختبار المساواة

العلائقي التام	العلائقي - الحسابي	الإجرائي المرن	الإجرائي التام
<p>- تفهم المساواة كرمز علائقي من خلال رؤية العلاقات وإجراء نفس العمليات على جانبيها.</p> <p>- تتجح مع الجمل المفتوحة في المستويات السابقة دون اللجوء للحسابات؛ لذلك لا فرق لديها إن كانت الأعداد التي تتعامل معها كبيرة فتركيزها على العلاقات دائماً.</p> <p>- تفسر العلاقات بين الكميات على جانبي علامة المساواة عند الحكم على صحة الجمل الرياضية من خلال النظر إلى بنية الطرفين.</p>	<p>- تفهم المساواة كرمز علائقي بأنه تساوي كميتين، ولكنها قد تأخذ بالتعريف الإجرائي عند الاستخدام أو التبرير.</p> <p>- تتجح مع الجمل المفتوحة في المستويين السابقين إضافة إلى الشكل: $a+b=c+d$ بإجراء العمليات نفسها على جانبي علامة المساواة من خلال اللجوء للحسابات.</p> <p>- تقارن بين الكميات على جانبي إشارة المساواة ولكنها تعجز عن تبرير حكمها دون اللجوء للحسابات.</p>	<p>- تفهم المساواة على أنها رمز إجرائي يشير إلى فعل شيء ما مثل: اجمع، اطرح، اضرب، والغاية إيجاد الناتج.</p> <p>- تتجح في التعامل مع الجمل المفتوحة في المستوى السابق إضافة إلى جمل مفتوحة تأخذ الأشكال: $c = a + b$ $c = a - b$</p> <p>- تستخدم الحسابات في حكمها على صحة نتائج العمليات الحسابية في الجمل الرياضية التي تتضمن المساواة.</p>	<p>- تفهم المساواة على أنها رمز إجرائي يشير إلى فعل شيء ما مثل: اجمع، اطرح، ...</p> <p>- تتجح في التعامل مع الجمل الحسابية المفتوحة التي تأخذ الشكل الرسمي: $a + b = c$ $a - b = c$</p> <p>- تستخدم الحسابات باتجاه واحد للتحقق من تنفيذ الفعل المطلوب في حكمها على صحة الجمل الرياضية التي تتضمن المساواة.</p>

اختبار مفهوم التكافؤ في المعادلات الخطية.

للكشف عن مدى فهم طلبة الصف الخامس لمفهوم التكافؤ في المعادلات الخطية، وبعد الاطلاع على العديد من الدراسات التي تناولت صياغة الأسئلة التي تكشف عن مدى فهم التكافؤ لدى الطلبة ومنها: (McNeil et al,2012;Fyfe et al,2018;Nelson and Fyfe,2019)، تم بناء اختبار التكافؤ في المعادلات متضمناً أربع مسائل رياضية بصورته الأولية حيث يهدف الاختبار بشكل محدد إلى الكشف عن درجة فهم طلبة الصف الخامس لمعنى التكافؤ الرياضي في المعادلات الخطية وتوظيفه أثناء حلها، من حيث:

- القدرة على توظيف مفهوم التكافؤ الرياضي في حل المعادلات الخطية التي تتضمن الجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة، باتخاذ نفس الإجراءات الرياضية على طرفي إشارة المساواة.
- القدرة على تمييز المعادلات الخطية المتكافئة التي لها الحلول نفسها من خلال النظر إلى بنية المعادلات أو من خلال إيجاد الحلول لكل منها ومقارنتها.

- القدرة على تقييم صحة حل المعادلات الخطية من خلال توظيف مفهوم التكافؤ الرياضي في تتبع الإجراءات المستخدمة أثناء الحل والكشف عن المغلوط منها. وبعد إعداد الاختبار تم عرضه على لجنة من المحكمين لإبداء الرأي في الدقة العلمية واللغوية لفقرات الاختبار، وفي مدى ملاءمتها للصف الخامس، وقد تم الأخذ بكافة الملحوظات والاقتراحات المقدمة من المحكمين والتعديل في ضوءها. وبعد ذلك تم تطبيق الاختبار على عينة استطلاعية تكونت من (26) طالبة من الصف الخامس من مجتمع الدراسة وخارج عينتها، لاحتماب الزمن المناسب للإجابة عن أسئلة الاختبار وللتأكد من ثبات الاختبار. ومن خلال حساب متوسط الزمن الذي استغرقته العينة الاستطلاعية للإجابة عن أسئلة الاختبار، فقد تم تحديد الزمن اللازم بواقع (40) دقيقة.

وقد استُخدم المنهج الكمي في تحليل إجابات العينة الاستطلاعية على اختبار التكافؤ الرياضي، حيث حسبت معاملات الصعوبة والتمييز للاختبار باستخدام برنامج (SPSS)، وتم اعتماد النسبة المئوية للطلبة الذين أجابوا عن الفقرة إجابة خاطئة كعامل صعوبة لكل فقرة من فقرات الاختبار، بينما وفق معامل التمييز لكل فقرة في صورة ارتباط الفقرة مع الدرجة الكلية. وقد تراوحت معاملات صعوبة الفقرات بين (0.35-0.60)، ومعاملات التمييز تراوحت بين (0.42-0.83)؛ وعليه فلم يتم حذف أي من الفقرات بناء على معامل الصعوبة أو معامل التمييز. كما تم التحقق من الصدق البنائي لأداة الدراسة، وذلك بحساب معاملات الارتباط بين الدرجة الكلية للمجال والدرجة الكلية للمجالات مجتمعة، حيث ظهر أن معامل الارتباط بين مجالات أداة الدراسة مع الدرجة الكلية للمجالات ذات دلالة إحصائية ($\alpha=0.01$) وقد تراوحت قيم معاملات الارتباط بين المجالات والدرجة الكلية لها بين (0.899) و (0.938)، وبلغت قيمة معاملات الارتباط بين المجالين (0.692)؛ مما يشير بشكل عام إلى صدق الاتساق الداخلي لأداة الدراسة. وللتأكد من ثبات الاختبار، فقد تم التحقق بطريقة الاختبار وإعادة تطبيق الاختبار (test-retest) بعد أسبوعين على المجموعة الاستطلاعية نفسها، والجدول أدناه يبين هذه المعاملات، وعدت هذه النسب مناسبة لغايات هذه الدراسة.

جدول (2): معامل ثبات إعادة للأبعاد والدرجة الكلية

المجال	ثبات إعادة
تطبيق التكافؤ أثناء حل المعادلة	0.86
تمييز المعادلات الخطية المتكافئة	0.89
اختبار التكافؤ ككل	0.88

المعالجات الإحصائية

- للإجابة عن السؤال الأول: والمتعلق بطبيعة فهم الطالبات وتفسيرهن لعلامة المساواة تم تحليل الإجابات، ووصف طبيعة فهم الطالبات باستخدام المنهج النوعي؛ إذ تم تحليل إجابات الطالبات عن اختبار المساواة بناء على مقياس التحليل المعد في هذه الدراسة والمتضمن أربعة مستويات تصنيفية (جدول (1))، تصف طبيعة فهم الطالبات لعلامة المساواة وهي: (المستوى الإجرائي التام، والمستوى الإجرائي المرن، والمستوى العلائقي-الحسابي، والمستوى العلائقي التام). وللتأكد من ثبات تحليل الإجابات تم الاستعانة بمحلل آخر له مؤهلات الباحثة العلمية نفسها

(ثبات عبر الأشخاص)، وتم حساب نسبة التوافق باستخدام معادلة (هولستي) بين التحليلين، وقد بلغت (100%).

- للإجابة عن السؤال الثاني: والمتعلق بدراسة أثر التدريس القائم على نظرية النشاط في تعزيز مفهوم التكافؤ في حل المعادلات الخطية لدى طالبات الصف الخامس، وفق المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية لدرجات طالبات الصف الخامس على اختبار مفهوم التكافؤ في القياس البعدي تبعاً للمجموعة (تجريبية، ضابطة)، ثم تم استخدام تحليل التباين الأحادي المصاحب (One way ANCOVA) للقياس البعدي لاختبار أثر التدريس القائم على نظرية النشاط في مفهوم التكافؤ ككل وفقاً للمجموعة (تجريبية، ضابطة) بعد تحييد أثر تحصيل الطالبات في الرياضيات في الفصل الدراسي الأول. وبهدف التحقق من جوهرية الفروق الظاهرية على بُعدي اختبار مفهوم التكافؤ، تم تطبيق تحليل التباين المصاحب الأحادي المتعدد (One way MANCOVA) لحساب أثر التدريس القائم على نظرية النشاط في كل بعد.

نتائج الدراسة

النتائج المتعلقة بالسؤال الأول

للإجابة عن السؤال الأول في الدراسة والذي يبحث في طبيعة فهم طالبات الصف الخامس لمعنى المساواة، فقد استخدم المنهج الوصفي-النوعي في تحليل إجابات طالبات الصف الخامس الأساسي للمجموعتين التجريبية والضابطة على اختبار المساواة. حيث تم تصنيف الطالبات تبعاً لطبيعة فهم المساواة التي أظهرتها الطالبة في الإجابة عن أسئلة الاختبار إلى أربع مستويات وفقاً للمعايير المدرجة في مقياس التحليل المعد في هذه الدراسة، ويبين الجدول (3) تكرارات طالبات المجموعتين التجريبية والضابطة على مستويات الفهم لمعنى المساواة.

جدول (3): تصنيف طالبات المجموعتين التجريبية والضابطة على مستويات الفهم لمعنى المساواة

النسبة المئوية	التجريبية	النسبة المئوية	الضابطة	
20%	4	20%	4	الإجرائي التام
70%	14	75%	15	الإجرائي المرن
10%	2	5%	1	العلائقي الحسابي
0%	0	0%	0	العلائقي التام
100%	20	100%	20	المجموع

وقد أظهرت نتائج التحليل أن أغلبية الطالبات تفهم المساواة كرمز إجرائي، حيث بلغت نسبة طالبات الصف الخامس التي تفهم المساواة كمفهوم إجرائي من كلا المجموعتين ما نسبته (92.5%)، في حين بلغت نسبة الطالبات التي تنظر للمساواة كمفهوم علائقي من كلا المجموعتين ما نسبته (7.5%). وهذا يشير إلى أن مستوى فهم طالبات الصف الخامس لمعنى المساواة يندرج بشكل عام ضمن مستوى الفهم الإجرائي.

وللانطلاق في تدريس وحدة المعادلات من الوضع الحالي للطالبات كمكون أساسي من مكونات نظرية النشاط، تم الكشف عن طبيعة فهم طالبات المجموعة التجريبية لمعنى المساواة. وقد أظهرت نتائج التحليل النوعي أن (20%) من الطالبات تم تصنيفهن في مستوى (الإجرائي التام)، حيث إن الطالبة المصنفة في هذا المستوى تفهم المساواة على أنها رمز إجرائي يشير إلى فعل شيء ما،

مثل: اجمع، اطرح. وتنجح في التعامل مع الجمل الحسابية المفتوحة التي تأخذ الشكل الرسمي $(a+b=c, a-b=c)$ ، فضلا عن أنها تستخدم الحسابات باتجاه واحد للتحقق من تنفيذ الفعل المطلوب في حكمها على صحة الجمل الرياضية التي تتضمن المساواة

كما أظهرت نتائج التحليل النوعي أن (70%) من الطالبات تم تصنيفهن في المستوى (الإجرائي المرن)؛ إذ إن الطالبة المصنفة في هذا المستوى تفهم المساواة على أنها رمز إجرائي يشير إلى فعل شيء ما مثل: اجمع، اطرح، اضرب، والغاية إيجاد الناتج. وتنجح في التعامل مع الجمل المفتوحة في المستوى السابق $(a+b=c, a-b=c)$ إضافة إلى جمل مفتوحة تأخذ الأشكال: $(c=a+b, c=a-b)$. كما أنها تستخدم الحسابات في حكمها على صحة نتائج العمليات الحسابية في الجمل الرياضية التي تتضمن المساواة. وأظهرت نتائج التحليل النوعي أن (10%) من طالبات المجموعة التجريبية تم تصنيفهن في مستوى (العلائقي- الحسابي)، حيث إن الطالبة المصنفة في هذا المستوى تفهم المساواة كرمز علائقي؛ أي أنها تساوي كميتين، ولكنها قد تأخذ بالتعريف الإجرائي عند الاستخدام أو التبرير، وتنجح في التعامل مع الجمل المفتوحة في المستويين السابقين، علاوة على نجاحها في التعامل مع الجمل الحسابية التي تأخذ الشكل: $(a+b=c+d)$ بإجراء نفس العمليات على جانبي علامة المساواة من خلال اللجوء للحسابات، وتقرن بين الكميات على جانبي إشارة المساواة ولكنها تعجز عن تبرير حكمها دون اللجوء للحسابات. والشكل (2) يمثل عينة من إجابات طالبات المجموعة التجريبية ضمن المستويات الثلاثة (الإجرائي التام، والإجرائي المرن، والعلائقي- الحسابي) عن أسئلة اختبار المساواة.

الشكل (2): عينة من إجابات طالبات المجموعة التجريبية ضمن المستويات الثلاثة (الاجرائي التام، والاجرائي المرن، والعلائقي-الحسابي) عن أسئلة اختبار المساواة.

إجابة إحدى الطالبات ضمن المستوى الإجمالي-الحسابي	إجابة إحدى الطالبات ضمن المستوى الإجمالي المرن	إجابة إحدى الطالبات ضمن المستوى الإجمالي التام
<p>المسألة الأولى</p> <p>جميعنا يعرف أن $7+2 = 9$</p> <p>↑</p> <p>ولكن سأطرح مجموعة من الأسئلة كالاتي:</p> <p>أ. ماذا يسمى الرمز المشار إليه بالسهم؟ رمز المساواة</p> <p>ب. ماذا يعني هذا الرمز؟ أن المقدارين متساويان.</p> <p>ج. هل يمكن لهذا الرمز أن يعني أشياء أخرى؟ اذكرها؟ يعني العدل أو أنه يوجد شيان مثل بعضهما.</p>	<p>المسألة الأولى</p> <p>جميعنا يعرف أن $7+2 = 9$</p> <p>↑</p> <p>ولكن سأطرح مجموعة من الأسئلة كالاتي:</p> <p>أ. ماذا يسمى الرمز المشار إليه بالسهم؟ يساوي</p> <p>ب. ماذا يعني هذا الرمز؟ أن اجمع أو أطرح أو أضرب</p> <p>ج. هل يمكن لهذا الرمز أن يعني أشياء أخرى؟ اذكرها؟ نعم، أن نجد الناتج</p>	<p>المسألة الأولى</p> <p>جميعنا يعرف أن $7+2 = 9$</p> <p>↑</p> <p>ولكن سأطرح مجموعة من الأسئلة كالاتي:</p> <p>أ. ماذا يسمى الرمز المشار إليه بالسهم؟ يساوي</p> <p>ب. ماذا يعني هذا الرمز؟ أن أجمع</p> <p>ج. هل يمكن لهذا الرمز أن يعني أشياء أخرى؟ اذكرها؟ لا يوجد</p>
<p>المسألة الثانية: اكتب العدد المفقود في □ مع توضيح طريقة الحل؟</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;"> $20 = 3 + \square$ <p>حتى يتساوى الطرفان طرحت 3 من 20</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;"> $32 = \square - 2$ <p>حتى يتساوى الطرفان استخدمت الجمع</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;"> $8 + 3 = \square + 5$ <p>طرحت 5 من 11 حتى يتساوى الطرفان.</p> </div>	<p>المسألة الثانية: اكتب العدد المفقود في □ مع توضيح طريقة الحل؟</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;"> $20 = 3 + \square$ <p>استخدمت الجمع</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;"> $32 = \square - 2$ <p>استخدمت الطرح</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;"> $8 + 3 = \square + 5$ <p>استخدمت الجمع</p> </div>	<p>المسألة الثانية: اكتب العدد المفقود في □ مع توضيح طريقة الحل؟</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;"> $20 = 3 + \square$ <p>جمعت</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;"> $32 = \square - 2$ <p>لأنهم ناقص</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px;"> $8 + 3 = \square + 5$ <p>جمعت الرقمين</p> </div>

وأما عن المستوى (العلائقي- التام) والذي فيه تفهم الطالبة المساواة كرمز علائقي من خلال رؤية العلاقات وإجراء نفس العمليات على جانبيها، وتنجح فيه بحل الجمل المفتوحة في المستويات السابقة دون اللجوء للحسابات حيث لا فرق لديها إن كانت الأعداد التي تتعامل معها كبيرة فتركيزها على العلاقات دائماً، إضافة إلى قدرتها على تفسير العلاقات بين الكميات على جانبي علامة المساواة عند الحكم على صحة الجمل الرياضية من خلال النظر إلى بنية الطرفين؛ فإنه لم

تصنف فيه أي طالبة من طالبات المجموعة التجريبية؛ وعليه فقد تم الانطلاق في إعداد المادة التعليمية لوحدة المعادلات من المستوى الإجرائي المرن حيث إن أغلبية الطالبات تدرج تحته.

النتائج المتعلقة بالسؤال الثاني

للإجابة عن السؤال الثاني من أسئلة الدراسة، والذي يهدف إلى تقصي أثر استخدام إستراتيجية التدريس القائم على نظرية النشاط في تعزيز مفهوم تكافؤ حل المعادلات لدى طالبات الصف الخامس، حسبت المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية لدرجات طالبات الصف الخامس على اختبار مفهوم التكافؤ في القياس البعدي، وذلك كما يتضح في الجدول رقم (4):

جدول (4): المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية لدرجات طالبات الصف الخامس على اختبار مفهوم التكافؤ ككل في القياس البعدي تبعاً لطريقة التدريس

المجموعة	العدد	المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري	المتوسط الحسابي البعدي المعدل	الخطأ المعياري
تجريبية	20	19.08	4.780	19.123	1.043
ضابطة	20	12.35	5.475	12.302	1.043

*العلامة القسوى للاختبار: (24)

يتضح من الجدول (4) وجود فروق ظاهرية بين المتوسطات الحسابية لدرجات طالبات الصف الخامس على اختبار مفهوم التكافؤ ككل في القياس البعدي وفقاً لطريقة التدريس، كما تشير النتائج إلى أنّ الفروق كانت لصالح المجموعة التجريبية الذين تعرضوا للتدريس القائم على نظرية النشاط مقارنة بأفراد المجموعة الضابطة. ولمعرفة فيما إذا كانت هذه الفروق الظاهرية ذات دلالة إحصائية، تم استخدام تحليل التباين الأحادي المصاحب (One way ANCOVA) للقياس البعدي لاختبار مفهوم التكافؤ ككل وفقاً للمجموعة (تجريبية، ضابطة)، وفيما يأتي عرض لهذه النتائج كما هو مبين في الجدول (5):

جدول (5): نتائج تحليل التباين الأحادي المصاحب (One way ANCOVA) للقياس البعدي لدرجات طالبات الصف الخامس على اختبار مفهوم التكافؤ ككل وفقاً لطريقة التدريس.

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط مجموع المربعات	قيمة ف	مستوى الدلالة	مربع إيتا ²
المصاحب	198.890	1	198.890	9.144	0.005	
طريقة التدريس	464.991	1	464.991	21.378	0.000	0.366
الخطأ	804.797	37	21.751			
الكلية	1455.944	39				

يتضح من الجدول (5) وجود فروق ذات دلالة إحصائية عند مستوى دلالة ($0.05 = \alpha$) في درجات طالبات الصف الخامس على اختبار مفهوم التكافؤ وفقاً لطريقة التدريس، مما يعني وجود أثر لطريقة التدريس، ولتحديد لصالح من تعزى الفروق، تم استخراج المتوسطات الحسابية المعدلة والأخطاء المعيارية لها وفقاً للمجموعة، وذلك كما هو مبين في الجدول (4)؛ إذ تشير المتوسطات

المعدّلة أن الفروق كانت لصالح المجموعة التجريبية التي درست بالتدريس القائم على نظرية النشاط.

كما يتضح من الجدول (5) أن حجم أثر طريقة التدريس كان كبيراً؛ فقد فسرت قيمة مربع أيتا (η^2) ما نسبته (36.6%) من التباين المُفسر (المتنبأ به) في المتغير التابع، وهو اختبار مفهوم التكافؤ. كما تم حساب الأوساط الحسابية والانحرافات المعيارية للقياس البعدي لأبعاد اختبار مفهوم التكافؤ وفقاً لطريقة التدريس، كما هو مبين في الجدول (6).

جدول (6): المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية للقياس البعدي لأبعاد اختبار مفهوم التكافؤ وفقاً للمجموعة

الأبعاد	المجموعة	العدد	المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري	الوسط الحسابي المعدل	الخطأ المعياري
تطبيق التكافؤ أثناء حل المعادلة الخطية	تجريبية	20	*9.73	2.337	9.760	0.545
تمييز المعادلات الخطية المتكافئة	ضابطة	20	7.65	3.422	7.615	0.545
تمييز المعادلات الخطية المتكافئة	تجريبية	20	**9.35	3.150	9.363	0.644
	ضابطة	20	4.70	2.638	4.687	0.644

*العلامة القسوى: (12) ** العلامة القسوى: (12)

يلاحظ من الجدول (6) وجود فروق ظاهرية بين المتوسطات الحسابية في القياس البعدي لأبعاد اختبار مفهوم التكافؤ ناتج عن اختلاف طريقة التدريس، وبهدف التحقق من جوهرية الفروق الظاهرية، تم تطبيق تحليل التباين المصاحب الأحادي المتعدد (One way MANCOVA). وذلك كما هو مبين في الجدول (7).

جدول (7): نتائج تحليل التباين الأحادي المصاحب المتعدد لأثر طريقة التدريس على أبعاد اختبار مفهوم التكافؤ.

الأثر	نوع الاختبار المتعدد	قيمة الاختبار المتعدد	ف الكلية	درجة حرية الفرضية	درجة حرية الخطأ	احتمالية الخطأ	حجم الأثر η^2
طريقة التدريس	Hotelling's Trace	0.713	12.832	2.000	36.000	0.000	0.416

يتبين من الجدول (7) وجود أثر ذي دلالة إحصائية لطريقة التدريس عند مستوى الدلالة (0.05) على القياس البعدي لأبعاد اختبار مفهوم التكافؤ مجتمعة حيث بلغت قيمة (هوتلينج) (0.713) وبدلالة إحصائية بلغت (0.000)، ولتحديد على أي بعد من الأبعاد كان أثر طريقة التدريس، فقد تم إجراء تحليل التباين الأحادي المصاحب (ANCOVA) لكل بعد على حدة وفقاً لطريقة التدريس، وذلك كما هو مبين في الجدول (8).

جدول (8): تحليل التباين الأحادي المصاحب (ANCOVA) لأثر طريقة التدريس في القياس البعدي لكل بعد من أبعاد اختبار مفهوم التكافؤ بعد تحييد أثر تحصيل الرياضيات في الفصل الأول لديهم.

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجة الحرية	وسط مجموع المربعات	ف	احتمالية الخطأ	حجم الأثر η^2
تحصيل الرياضيات (المصاحب)	106.740	1	106.740	17.989	.000	
	14.223	1	14.223	1.717	.198	
طريقة التدريس	45.990	1	45.990	7.751	.008	.173
	218.508	1	218.508	26.376	.000	.416
الخطأ	219.547	37	5.934			
	306.527	37	8.285			
الكل المصحح	369.344	39				
	536.975	39				

يظهر من الجدول (8) وجود فروق دالة إحصائية عند مستوى الدلالة ($\alpha=0.05$) وفقاً لأثر طريقة التدريس في البعدي الاختبار لصالح المجموعة التجريبية علماً بأن حجم الأثر للأبعاد قد بلغ 17.3% و 41.6% لبعدي التكافؤ أثناء حل المعادلة، وتمييز المعادلات الخطية المتكافئة على التوالي.

مناقشة النتائج

تشكل موضوعات الجبر في الرياضيات عائقاً أمام تعلم الطلبة، إذ إن كثيراً من الطلبة بمجرد رؤيتهم للمتغير (x) على سبيل المثال لا الحصر يشعرون بالخوف والارتباك والعجز عن إعطاء معنى للمفهوم، علاوة على أن بعض الطلبة يشعرون بالملل من تعلم الموضوعات الجبرية، وغالباً ما يكون هذا الوصف لحال الطلبة الذين يتعلمون الجبر من خلال طرق التدريس التقليدية التي تقدم

المفهوم الجديد للطلبة بشكل مباشر دون مراعاة لواقعهم الحالي الذي من المفترض أن يكون الانطلاقة في تعلمهم.

وقد تمّ الكشف في الدراسة الحالية عن طبيعة فهم الطالبات لمعنى المساواة بوصفه مفهوماً قليلاً يبني عليه مفهوم حل المعادلة للانطلاق منه في بناء المادة التعليمية. وقد كشفت نتائج تحليل إجابات الطالبات على اختبار المساواة أن أغلبية الطالبات تفهم المساواة كرمز إجرائي وليس علائقي، إذ عبرت بعض الطالبات عن مفهوم المساواة بأنه رمز يشير إلى إجراء حسابي معين كالجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة، والنسبة العظمى من الطالبات عبرت عن مفهوم المساواة على أنه رمز يعني إيجاد ناتج المسألة، ونسبة قليلة جداً من الطالبات عبرت عن مفهوم المساواة كرمز علائقي يشير إلى التكافؤ بين طرفين. وتتفق هذه النتيجة مع نتائج مجموعة من الدراسات التي كشفت عن وجود ضعف لدى الطلبة في فهم معنى المساواة والتعامل معها كرمز إجرائي. (Duncan,2015; McNel et al,2019; McAulffe et al,2020; Ralston and Li,2022).

ويمكن تفسير هذه النتيجة بأن الأغلبية العظمى من الطلبة لم تتوفر لهم الخبرات والفرص الكافية في المراحل التعليمية المبكرة لاكتشاف المعنى الصحيح لمفهوم المساواة، إذ إن الكثير منهم يعجز عن التفكير التجريدي بمفهوم المساواة وبأنه يعمل بشكل مختلف عن المفاهيم والرموز الرياضية الأخرى مثل: (+, -, ×, ÷)، وغالبا ما يكون الفهم الضعيف لمعنى المساواة نتاج المعرفة غير الصحيحة للخبرات والتجارب المبكرة مع الحساب.

ومن هنا وجب التدخل بمراعاة الواقع الحالي للطالبات في مفهوم المساواة أثناء بناء المادة التعليمية التي تمثلت في وحدة المعادلات لتكون بمثابة دليل إرشادي للمعلمين لتطبيق التدريس القائم على نظرية النشاط أثناء تدريسهم للطلبة، حيث ركزت الوحدة الدراسية على بناء مفهوم حل المعادلات التي تتضمن الجمع والطرح والضرب والقسمة من خلال خلق بيئة تعليمية دافعة تعتمد على نظرية النشاط ومكوناته في طريقة التدريس عبر ثلاث مراحل متكاملة، تتسلسل بدءاً من إيجاد الدافع لدى الطالبات لتعلم مفهوم حل المعادلة ثم إيجاد فرص تعليمية للطالبات تمثلت بمجموعة من الأنشطة التعليمية التفاعلية؛ وذلك لتكوين المعرفة الجديدة المتعلقة بمفهوم حل المعادلة، ثم مرحلة الممارسة لترسيخ المعرفة التي تم بناؤها واستمرارية تقويمها.

وقد أظهرت نتائج تحليل البيانات وجود أثر إيجابي للتدريس القائم على نظرية النشاط في تعزيز مفهوم التكافؤ الرياضي لدى الطالبات؛ فاستناداً لما أظهرته نتائج السؤال الثاني في هذه الدراسة يمكن التأكيد على الأثر الإيجابي للتدريس القائم على نظرية النشاط في تعزيز التكافؤ الرياضي لدى الطالبات ببعديه (تطبيق التكافؤ أثناء حل المعادلة الخطية، تمييز المعادلات الخطية المتكافئة)، وذلك من خلال تفوق أفراد المجموعة التجريبية الذين تعرضوا للتدريس القائم على نظرية النشاط في بعدي التكافؤ الرياضي على أفراد المجموعة الضابطة الذين درسوا بالطريقة الاعتيادية.

ويمكن تفسير هذه النتيجة بأن التدريس القائم على نظرية النشاط وفر مجالاً لمواجهة أكبر تحدي يواجه الطلبة في بناء مفهوم التكافؤ، وهو التغلب على المفاهيم المغلوطة السابقة حول المساواة؛ إذ إن التدريس في ضوء نظرية النشاط ينطلق من وضع الطلبة الحالي للمفاهيم السابقة لبناء المفهوم الجديد؛ للتحقق من سلامة المفاهيم وتصويب الفهم المغلوط حولها وهذا ما حدث بالفعل.

وفي السياق السابق وضح (ميكينيل) (2019) (McNeil) أن فهم الطلبة لحل المعادلات يتضمن تفسيرهم لعلامة المساواة كرمز علائقي، وقدرتهم على قراءة بنية المعادلات وترميزها بشكل صحيح، وملاحظتهم للعلاقات بين التعبيرات في المعادلات، وفي ضوء التدريس القائم على نظرية

النشاط توفرت الفرص التي مكنت الطالبات من بناء مفهوم حل المعادلة الخطية بشكل صحيح، وهذا بدوره أسهم بشكل مباشر في تعزيز مفهوم التكافؤ الرياضي لدى الطالبات.

كما وفرّ التدريس القائم على نظرية النشاط فرصاً للطالبات عززت الربط بين التصور الذهني لمفهوم التكافؤ في المعادلات والنماذج التمثيلية المختلفة له، والتي ظهرت باستخدام الأدوات المختلفة كالقطع الجبرية والميزان ذي الكفتين، فاستخدام الميزان ذي الكفتين مثلاً اختصر كثيراً من الوقت والجهد في تصويب المعنى المغلوط لدى الطالبات حول مفهوم المساواة. والأمر الجيد أن تدخل المعلمة كان محدوداً في هذا الأمر؛ إذ شعرت الطالبات بأن مفهوم المساواة لديهن يحتاج إلى إعادة بناء من جديد أثناء تعاملهن مع الأدوات؛ إذ أخذت الطالبات تعطي معاني جديدة وصحيحة لمفهوم المساواة تختلف تماماً عن تلك المعاني المغلوطة التي أظهرتها الطالبات في الاستجابة عن أسئلة اختبار المساواة، وبهذا تمكنت الطالبات من تكوين المعرفة المفاهيمية بشكل صحيح، وهذا بدوره انعكس على قدرة الطالبات على رؤية التكافؤ الرياضي أثناء حل المعادلات وبين المعادلات واستشعار المعنى الحقيقي له.

وقد أسهمت مرحلة إيجاد الدافع لدى الطالبات التي غالباً ما كانت على شكل لعبة تعليمية تلائم طبيعة المرحلة العمرية التي تجرى عليها الدراسة في إدراك الطالبات لمواطن الضعف والحاجة لبناء مفهوم التكافؤ في المعادلات، حيث إن الحاجة والرغبة في الوصول لنتيجة مرضية كان يتطلب استدعاء المفهوم بشكل صحيح، وتتفق هذه النتيجة مع دراسة (لي) وآخرون (Lee et al.)، (2022) التي ركزت على أهمية استخدام الألعاب التعليمية كدافع قوي في بناء مفهوم التكافؤ لدى الطلبة.

علاوة على أن مرحلة الممارسة التي تعد جزءاً لا يتجزأ من النهج المتبع في التدريس القائم على نظرية النشاط أتاحت فرصة أمام الطالبات للممارسات المكثفة غير التقليدية لمفاهيم حل المعادلات الخطية والتي من شأنها انعكست على تعزيز مفهوم التكافؤ لدى الطالبات، وهذه النتيجة تتفق مع دراسة (ميكينيل) (McNeil et al.)، (2012) التي أشارت إلى أن الممارسة غير التقليدية من شأنها أن تحسن مفهوم التكافؤ لدى الطلبة. ومن هنا تكتسب الطالبات فهماً راسخاً لمفهوم حل المعادلة لا توفرها الصفوف التقليدية، وتضمن لهم فرصة أكبر لبناء مفاهيم جبرية جديدة بشكل مترابط وسليم.

وبناء على ما سبق، فإنّ الضعف في أداء المجموعة الضابطة يمكن أن يعزى إلى محاولة بناء المفاهيم الجبرية الجديدة مثل مفهوم حل المعادلة دون التحقق من سلامة البناء المفاهيمي السابق الذي يمثل أساساً للبناء عليه، مثل مفهوم المساواة، إضافة إلى عدم إيجاد دوافع تعليمية مستمرة تضمن انخراط الطالبات المستمر في المواقف التعليمية، وكذلك تغييب توظيف الأدوات التعليمية الفاعلة الأمر الذي من شأنه تضييع فرصة تقريب المفهوم للمجرد للطالبات وجعله ذات معنى. وفي ضوء نتائج الدراسة واستنتاجاتها، واستناداً لما سبق من مناقشات فإنه يمكن التوصية بالآتي:

1. توظيف التدريس القائم على نظرية النشاط في تدريس الرياضيات، لما أظهره من أثر إيجابي في تعزيز مفهوم التكافؤ الرياضي لدى الطالبات والدافعية نحو تعلم الرياضيات.
2. عقد ورشات تدريبية لمساعدة المعلمين على توظيف التدريس القائم على نظرية النشاط عملياً في حصص الرياضيات، وتشجيعهم على توظيفه في تدريس موضوعات رياضية مختلفة.
3. إجراء المزيد من الدراسات التي تتناول التدريس القائم على نظرية النشاط، لتشمل صفوف متنوعة، وموضوعات رياضية مختلفة.

المراجع

- Bedny, G., & Karwowski, W. (2007). *A systemic-structural theory of activity*. CRC Taylor & Francis.
- Duncan, Ch. (2015). *A study of mathematical equivalence: the importance of the equal sign*. LSU Master's theses.
- https://digitalcommons.lsu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1397&context=grads_chool_theses.
- Fyfe, E. R., Matthews, P. G., Amsel, E., McEldoon, K. L., & McNeil, N. M. (2018). Assessing formal knowledge of math equivalence among algebra and pre-algebra students. *Journal of Educational Psychology*, 110(1), 87.
- Engeström, Y. (1987). *An activity-theoretical approach to developmental research*. Helsinki: Orienta-Konsultit.
- Hasan, H., & Kazlauskas, A. (2014). Activity theory: who is doing what, why and how. *Research Online*. Retrieved 20 May 2022, from <https://ro.uow.edu.au/buspapers/403/>.
- Hashim, N. & Jones, M. (2007). Activity theory: a framework for qualitative analysis. <http://ro.uow.edu.au/commpapers/408/>.
- Khiok- Seng, Q. (2003). Activity theory for mathematics learning in and out of the classroom? *Educational Research Association of Singapore (ERAS)*, 462-470.
- Lee, J. E., Chan, J. Y. C., Botelho, A., & Ottmar, E. (2022). Does slow and steady win the race? Clustering patterns of students' behaviors in an interactive online mathematics game. *Educational technology research and development*, 70(5), 1575-1599.
- Lee, J., & Pang, J. (2023). What is so Complicated in Developing Students' Conception of the Equal Sign? *International Journal of Science and Mathematics Education*, 21(2), 559-580.
- Leont'ev, A. (1981). *Problems of the development of the mind*. Progress Publ.
- Loc, N. P., Oanh, N. P. P., Thao, N. P., & Van De, T. (2022). Activity theory as a framework for teaching mathematics: An experimental study. *Heliyon*, 8(10).
- Madej, L. (2021). Primary school students' knowledge of the equal sign—the Swedish case. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20(2), 321-343.
- Masson, J. (2011). Commentary on Part III. In J. Cai & E. Knuth, *Early algebraization A global dialogue from multiple perspectives* (1st ed., pp. 557-577). Springer.
- Matthews, P. G., & Fuchs, L. S. (2020). Keys to the gate? equal sign knowledge at second grade predicts fourth-grade algebra competence. *Child development*, 91(1), e14–e28.

- McAuliffe, S., Tambara, C., & Simsek, E. (2020). Young students' understanding of mathematical equivalence across different schools in South Africa. *South African Journal Of Childhood Education*, 10(1).
<https://doi.org/10.4102/sajce.v10i1.807>.
- McNeil, N. M. (2008). Limitations to teaching children $2 + 2 = 4$: typical arithmetic problems can hinder learning of mathematical equivalence. *Child Development*, 79(5), 1524–1537.
- McNeil, N. M., Chesney, D. L., Matthews, P. G., Fyfe, E. R., Petersen, L. A., Dunwiddie, A. E., & Wheeler, M. C. (2012). It pays to be organized: Organizing arithmetic practice around equivalent values facilitates understanding of math equivalence. *Journal of Educational Psychology*, 104(4), 1109.
- McNeil, N. M., Hornburg, C. B., Devlin, B. L., Carrazza, C., & McKeever, M. O. (2019). Consequences of individual differences in children's formal understanding of mathematical equivalence. *Child Development*, 90(3), 940-956.
- Mitsi, P., & Papaspyrou, G. (2017). Implementation of "Activity Theory" in the framework of differentiated teaching: A case study. *International Journal Of Teaching & Education*, 5(2), 57-73.
- Nardi, B. A. (1996). Studying context: A comparison of activity theory, situated action models, and distributed cognition. *Context and consciousness: Activity theory and human-computer interaction*, 69102.
http://sonify.psych.gatech.edu/~ben/references/nardi_studying_context_a_comparison_of_activity_theory_situated_action_models_and_distributed_cognition.pdf
- Nelson, L. J., & Fyfe, E. R. (2019). Metacognitive monitoring and help-seeking decisions on mathematical equivalence problems. *Metacognition and Learning*, 14, 167-187.
- Nunez, I. (2009). Activity theory in mathematics education. *British society for research into learning mathematics*, 29(2), 53- 57.
- Portnov-Neeman, Y., & Barak, M. (2013). Exploring students' perceptions about learning in school: an activity theory based study. *Journal Of Education And Learning*, 2(3). <https://doi.org/10.5539/jel.v2n3p9>.
- Ralston, N., & Li, M. (2022). Student conceptions of the equal sign: knowledge trajectories across the elementary grades. *The Elementary School Journal*, 122(3), 411-432.
- Rittle-Johnson, B., Matthews, P., Taylor, R., & McEldoon, K. (2011). Assessing knowledge of mathematical equivalence: A construct-modeling approach. *Journal Of Educational Psychology*, 103(1), 85-104.
- Sumpter, L., & Löwenhielm, A. (2022). Differences in grade 7 students' understanding of the equal sign. *Mathematical Thinking AandLearning*, 1-16.
<https://doi.org/10.1080/10986065.2022.2058160>.
- Tondorf, A., & Prediger, S. (2022). Connecting characterizations of equivalence of expressions: design research in Grade 5 by bridging graphical and symbolic representations. *Educational Studies in Mathematics*, 111(3), 399-422.

- Vale, C. (2013). Equivalence and relational thinking: opportunities for professional learning. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 18(2), 34-40.
- Vermeulen, C., & Meyer, B. (2017). The equal sign: teachers' knowledge and students' misconceptions. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 21(2), 136-147.
- Vygotsky, L., Cole, M., Stein, S., & Sekula, A. (1978). *Mind in society*. Harvard University Press.
- Wardat, Y., Jarrah, A. M., & Stoica, G. (2021). Understanding the Meaning of the Equal Sign: A Case Study of Middle School Students in the United Arab Emirates. *European Journal of Educational Research*, 10(3), 1505-1514.